# 相対単数群の指数について(代数的整数論)



尾台, 喜孝

数理解析研究所講究録
第759巻1991年94-105


# 相対単数群の指数について

群馬工業高専　尾台　喜孝　( Yoshitaka Odai )

## 1　Introduction

K を有限次代数体とし、L を K の拡大次数 n の有限次 abel 拡大とします。L/K の中間体 M に対して $E_M$ で M の単数群を、$W_M$ で M の 1 の根の群を表わします。そして

$$E_{M/K} = \{\varepsilon \in E_M \mid \text{M/K の M 以外の任意の中間体 F に対して、}\varepsilon\text{ の F へのノルムが } W_F \text{ に属する。}\}$$

と定義し、M の K 上の相対単数群と呼びます。

$\mathbf{E} = E_L/W_L$ と置き、この中で相対単数群を考えます。即ち $\mathbf{P}_M = E_{M/K}W_L/W_L$と置きます。C を L/K の cyclic な中間体すべてのなす集合とし、

$$\mathbf{P} = \prod_{M \in C} \mathbf{P}_M$$

と定義すれば、$\mathbf{E}^n \subset \mathbf{P}$ であることが [8] において示されました。従って、$[\mathbf{E}:\mathbf{P}]$ が $n^{\mathrm{rank}\mathbf{E}}$ の約数であることはわかっています。この講演では、$[\mathbf{E}:\mathbf{P}]$ のより良い評価について報告します。第 2 節で $\mathbf{P}$ を含む $\mathbf{E}$ の部分群 $\mathbf{R}$ を定義して $[\mathbf{E}:\mathbf{P}] = [\mathbf{E}:\mathbf{R}][\mathbf{R}:\mathbf{P}]$ と分解します。第 3 節で $[\mathbf{R}:\mathbf{P}]$ を評価します。第 4 節で $[\mathbf{E}:\mathbf{R}]$ を評価します。

ここで考察する問題については、K が有理数体の場合は [2] や [6] で、K が虚二次体の場合は [7] や [9] で扱われています。

Kが有理数体または虚二次体の場合は類数公式に円単数群または楕円単数群の指数が出てくるので、この問題を類数の計算に応用することができます。Kが一般の場合はそれにあたるものがないので類数の計算への応用は今のところできそうもありませんが、単数群の指数が出てくるところへの応用が期待できるのではないかと思います。

## 2 Preliminaries

まず、もう少し記号を準備します。$\mathbf{Q}$で有理数体を、$\mathbf{Z}$で有理整数環を表わします。L/KのGalois群をGで表わします。Gは位数nのabel群です。Gの$\mathbf{Q}$既約指標すべてのなす集合を$\Lambda$で表わします。そして$\Lambda$の元$\lambda$に対し、

$G_\lambda = \{\sigma \in G \mid \lambda(\sigma) = \lambda(1)\}$
$K_\lambda$ : $G_\lambda$ の不変体
$n_\lambda = [G : G_\lambda] = [K_\lambda : K]$
$\Lambda_\lambda = \{\mu \in \Lambda \mid G_\lambda \subset G_\mu\} = \{\mu \in \Lambda \mid K_\lambda \supset K_\mu\}$

と定義します。すると、写像 $\lambda \longrightarrow K_\lambda$ は$\Lambda$とCの間の全単射になることが知られています。従って、$\mathbf{P}_{K_\lambda}$を$\mathbf{P}_\lambda$と略記すれば

$$\mathbf{P} = \prod_{\lambda \in \Lambda} \mathbf{P}_\lambda$$

となります。

[8]で行なった$\mathbf{P}_\lambda$の書き換えにより次が得られます。

**Lemma 1** $E_L$の元$\varepsilon$が$W_L$を法として見たとき$\mathbf{P}_\lambda$に属

するための必要十分条件は次の２つを満たすことである。

(i) $G_\lambda$ -不変な $E_L$ の元で、$W_L$ を法として$\varepsilon$ と合同なものがある。

(ii) $\Lambda_\lambda$ の$\lambda$ 以外の任意の元 $\mu$ に対して、$\varepsilon$ の $K_\mu$ へのノルムが $W_{K_\mu}$ に属する。

さらに記号を準備します。G の $\mathbf{Q}$ 上の群環を $\mathbf{Q}$[G] と表わします。$\Lambda$ の元 $\lambda$ に対し、

$$e_\lambda = \frac{1}{n}\sum_{\sigma\in G}\lambda(\sigma^{-1})\sigma$$

と置くと、これらは $\mathbf{Q}$[G] の直交巾等元になり、

$$\mathbf{Q}[G] = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} e_\lambda\mathbf{Q}[G]$$

と直和分解されます。

さて、$\mathbf{E}$ は $\mathbf{Z}$-torsionfree G-module ゆえ、$\mathbf{Q}$-テンサー $\mathbf{E_Q}$ $= \mathbf{E}\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{Q}$ に埋め込んで考えることができます。また、$\mathbf{E_Q}$ は $\mathbf{Q}$[G]-module になりますから、$\mathbf{E_Q} = \Pi_{\lambda\in\Lambda}\mathbf{E_Q}^{e_\lambda}$ と直積分解されます。ここで次のように定義します。

**Definition** $\mathbf{R}_\lambda = \mathbf{E}^{e_\lambda}\cap\mathbf{E} = \mathbf{E_Q}^{e_\lambda}\cap\mathbf{E}$ とし、

$$\mathbf{R} = \prod_{\lambda\in\Lambda}\mathbf{R}_\lambda$$

すると、やはり本質的には [8] で行なったことですが、次が分かります。

**Lemma 2**　$E_L$ の元 $\varepsilon$ が $W_L$ を法として見たとき $\mathbf{R}_\lambda$ に属するための必要十分条件は次の２つを満たすことである。

(i′) $\varepsilon$ が $W_L$ を法として $G_\lambda$ -不変である。

(ii) $\Lambda_\lambda$ の$\lambda$ 以外の任意の元 $\mu$ に対して、$\varepsilon$ の $K_\mu$ へのノルムが $W_{K_\mu}$ に属する。

Lemma 1 の (i) と Lemma 2 の (i′) を比べることにより次が得られます。

**Lemma 3**　$\mathbf{P}_\lambda \subset \mathbf{R}_\lambda$ 従って $\mathbf{P} \subset \mathbf{R}$ である。よって

$$[\mathbf{E} : \mathbf{P}] = [\mathbf{E} : \mathbf{R}][\mathbf{R} : \mathbf{P}]$$

そこで $[\mathbf{E} : \mathbf{R}]$ と $[\mathbf{R} : \mathbf{P}]$ と二つに分けて考えます.

## 3　[R:P]

この節では $[\mathbf{R} : \mathbf{P}]$ について考えます。$\mathbf{E_Q} = \Pi_{\lambda\in\Lambda}\,\mathbf{E_Q}^{e_\lambda}$ が直積であることと $\mathbf{P}_\lambda \subset \mathbf{R}_\lambda \subset \mathbf{E_Q}^{e_\lambda}$ であることより次が得られます。

**Lemma 4**　$\mathbf{P} = \Pi_{\lambda\in\Lambda}\,\mathbf{P}_\lambda$ と $\mathbf{R} = \Pi_{\lambda\in\Lambda}\,\mathbf{R}_\lambda$ は直積である。よって

$$[\mathbf{R} : \mathbf{P}] = \prod_{\lambda\in\Lambda}[\mathbf{R}_\lambda : \mathbf{P}_\lambda]$$

従って、$[\mathbf{R}_\lambda : \mathbf{P}_\lambda]$ を評価すればよいことになります。

**Theorem 1** $r_1$ と $r_2$ をそれぞれ K の実素点と虚素点の数とし、$r_1^\lambda$ を K の実素点で $K_\lambda$ で不分岐なものの数とする。Möbius 関数を $\varphi$ で表わす。

$$r_\lambda = \begin{cases} r_1 + r_2 - 1 & \lambda \text{ が trivial な指標のとき} \\ (r_1^\lambda + r_2)\varphi(n_\lambda) & \text{そうでないとき} \end{cases}$$

と置く。$W_L$の位数を w で表わす。すると、

$[\mathbf{R}_\lambda : \mathbf{P}_\lambda]$ は $n^{r_\lambda}$ と $w^{r_\lambda}$ の公約数である。

**Proof** [8] でみたように $\mathbf{R}_\lambda{}^n \subset \mathbf{P}_\lambda$ であり、一方 Lemma 1 の (i) と Lemma 2 の (i′) を比べれば $\mathbf{R}_\lambda{}^w \subset \mathbf{P}_\lambda$ がわかる。$\mathbf{P}_\lambda$ の rank が $r_\lambda$ になることは [8] で計算している。以上を合わせて Theorem 1 を得る。

**Example 1** n と w が互いに素であるときは、Theorem 1 よりすべての $\lambda$ に対して $[\mathbf{R}_\lambda : \mathbf{P}_\lambda] = 1$ である。従って、特に $[\mathbf{R} : \mathbf{P}] = 1$ となる。

**Example 2** K を有限次代数体とし、$W_K$の位数を $w_K$で表わす。$\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{r_1+r_2-1}$ を K の基本単数系とし

$$L = K(\sqrt[w_K]{\varepsilon_1}, \ \ldots\ , \sqrt[w_K]{\varepsilon_{r_1+r_2-1}})$$

と置く。trivial な指標を 1 で表わすことにすれせば、Lemma 2 より $\sqrt[w_K]{\varepsilon_i} \mod W_L$ は $\mathbf{R}_1$ に属する。また容易に示せるように、

$\Pi_i(\sqrt[w_K]{\varepsilon_i}\ mod\ W_L)^{a_i}$ が $\mathbf{P}_1$ に属するための必要十分条件はすべてのiに対して $a_i \equiv 0\ mod\ w_K$ となることである。従って、$[\mathbf{R}_1 : \mathbf{P}_1]$ は ${w_K}^{r_1+r_2-1}$ の倍数である。さらに $w = w_K$ （即ち $W_L = W_K$ ）であれば、Theorem 1 より

$$[\mathbf{R}_1 : \mathbf{P}_1] = w^{r_1+r_2-1}$$

となる。なお、基本単数系をどうとっても $w = w_K$ となるKが無限個存在することを注意しておく。例えばKとして円分体をとればよい。

**Example 3**　mを2以上の偶数とし、$\zeta_m$ で1の原始m乗根を表わす。Kを $\zeta_m + {\zeta_m}^{-1}$ を含む非総虚な有限次代数体とする。m = 2のときは $M = K(\sqrt{-2})$ 、その他のときは $M = K(\zeta_m)$ と置く。すると [M:K] = 2であり $rankE_{M/K} = r_2$ となることがわかる。さらに、$\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{r_2}$ を $E_{M/K}$ の独立な生成系とし

$$L = M(\sqrt[m]{\varepsilon_1},\ \ldots\ ,\ \sqrt[m]{\varepsilon_{r_2}})$$

と置く。するとL/Kはabel拡大になることがわかる。Mに対応する指標を$\lambda$で表わせば、Lemma 2より $\sqrt[m]{\varepsilon_i}\ mod\ W_L$ は $\mathbf{R}_\lambda$ に属する。また容易に示せるように、$\Pi_i(\sqrt[m]{\varepsilon_i}\ mod\ W_L)^{a_i}$ が $\mathbf{P}_\lambda$ に属するための必要十分条件はすべてのiに対して $a_i \equiv 0\ mod\ m$ となることである。従って、$[\mathbf{R}_\lambda : \mathbf{P}_\lambda]$ は $m^{r_2}$ の倍数である。さらに $w = m$ であれば、$r_\lambda = (0 + r_2)\varphi(2) = r_2$ と合わせて、Theorem 1 より

$$[\mathbf{R}_\lambda : \mathbf{P}_\lambda] = w^{r_\lambda} = m^{r_2}$$

となる。なお、$E_{M/K}$ の独立な生成系をどうとっても $w = m$ となるKが無限個存在することを注意しておく。例えばKとして $\mathbf{Q}(\zeta_m + {\zeta_m}^{-1})$ の非総実な三次拡大をとればよい。

一般には Theorem 1 は best possible ですが、特別な仮定のもとではもっと良い評価が得られます。

**Theorem 2** $W_L = W_K$ であり、$\lambda$ が trivial な指標でないと仮定する。もし $n_\lambda$ が w の素因子 p の巾であれば $[\mathbf{R}_\lambda : \mathbf{P}_\lambda]$ は $p^{r_1^\lambda + r_2}$ の約数、その他のときは $[\mathbf{R}_\lambda : \mathbf{P}_\lambda] = 1$ である。

**Proof** $\mathbf{R}_\lambda, \mathbf{P}_\lambda$ は $\mathbf{Z}$-torsionfree ゆえ $[\mathbf{R}_\lambda : \mathbf{P}_\lambda] = [\mathbf{R}_\lambda{}^w : \mathbf{P}_\lambda{}^w]$ となる。ここで $\mathbf{P}_\lambda^+ = \{\varepsilon \in \mathbf{P}_\lambda \mid \varepsilon^{1-\sigma} \in \mathbf{P}_\lambda{}^w\}$ と定義する。ただし$\sigma$ は $G/G_\lambda$ の生成元とする。すると定義より明らかに $(\mathbf{P}_\lambda^+)^{1-\sigma} \subset \mathbf{P}_\lambda{}^w$ であり、また仮定 $W_L = W_K$ を使えば $\mathbf{R}_\lambda{}^w \subset \mathbf{P}_\lambda^+$ が証明される。従って、

$$[\mathbf{R}_\lambda : \mathbf{P}_\lambda] \text{ は } [\mathbf{P}_\lambda^+ : (\mathbf{P}_\lambda^+)^{1-\sigma}] \text{ の約数である。}$$

そして [8] で $\mathbf{P}_\lambda$ に対してみたのと同じようにして $\mathbf{P}_\lambda^+$ が $n_\lambda$-分体の $(r_1^\lambda + r_2)$ 個のイデアルの直和と同型であることが分かる。この同型対応では $1-\sigma$ の作用は $1-\zeta$ をかけることに対応している。ただし$\zeta$は 1 の原始 $n_\lambda$乗根とする。従って、

$$[\mathbf{P}_\lambda^+ : (\mathbf{P}_\lambda^+)^{1-\sigma}] = \{N_{\mathbf{Q}(\zeta)/\mathbf{Q}}(1-\zeta)\}^{r_1^\lambda + r_2}$$

となる。$N_{\mathbf{Q}(\zeta)/\mathbf{Q}}(1-\zeta)$ は $n_\lambda$ が素数 p の巾のときは p であり素数巾でないときは 1 になる。

最後に、p が w の素因子でないときは Theorem 1 を合わせて考えれば、$[\mathbf{R}_\lambda : \mathbf{P}_\lambda] = 1$ が得られる。これで Theorem 2 は証明された。

**Example 4**　q を奇素数、$\ell$ を q と異なる 4 を法として 1 に合同な素数とし、$\zeta_q$ で 1 の原始 q 乗根を表わす。$K = \mathbf{Q}(\sqrt{-1},\ \zeta_q + \zeta_q^{-1})$ とし、$M = K(\sqrt{\ell})$ と置く。すると [M:K] = 2 であり $rankE_{M/K} = r_2 = (q-1)/2$ となることがわかる。$M^+$ で M の最大実部分体を表わせば、[3] の Satz 22 (b) により $E_M = E_{M^+}W_M$ であることが分かる。そこで$\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{(q-1)/2}$ を $E_{M/K}$ の独立な生成系で $M^+$ に属するものとし

$$L = M(\sqrt{\varepsilon_1},\ \ldots\ , \sqrt{\varepsilon_{(q-1)/2}}\,)$$

と置く。すると L/K は abel 拡大になることがわかる。M に対応する指標を$\lambda$ で表わせば，Lemma 2 より$\sqrt{\varepsilon_i}\ mod\ W_L$ は $\mathbf{R}_\lambda$ に属する。また容易に示せるように、$\Pi_i(\sqrt{\varepsilon_i}\ mod\ W_L)^{a_i}$ が $\mathbf{P}_\lambda$ に属するための必要十分条件はすべての i に対して $a_i$ が偶数となることである。従って、$[\mathbf{R}_\lambda : \mathbf{P}_\lambda]$ は $2^{(q-1)/2}$ の倍数である。さらにこのとき $w = w_K = 4$ が分かるので、$n_\lambda = [M : K] = 2$ と $r_1^\lambda + r_2 = 0 + r_2 = (q-1)/2$ に注意すれば、Theorem 2 より

$$[\mathbf{R}_\lambda : \mathbf{P}_\lambda] = 2^{(q-1)/2}$$

となる。

**Example 5** (cf. [6] Satz 13)　K を有理数体または虚二次体とする。与えられた自然数 m に対して、q と $\ell$ を K の判別式と素な相異なる二つ素数で $q \equiv 1 + 2^m\ mod\ 2^{m+1}$, $\ell \equiv -1\ mod\ 4q$ なるものとする。すると q$\ell$-分体は唯一つの $2^m$ 次実 cyclic 体 X を含む。$\zeta_{q\ell}$ で 1 の原始 q$\ell$乗根を表わし、$1 - \zeta_{q\ell}$の X へのノルムを$\varepsilon$ とおけば、$\varepsilon$ は X の単数になる。そこで、$M = KX$ とし、$L = M(\sqrt{\varepsilon})$ と置く。すると M/K は $2^m$ 次 cyclic 拡大で、L/K は $2^{m+1}$ 次 abel 拡大になることがわかる。M に対応する

指標を$\lambda$で表わせば，Lemma 2より$\sqrt{\varepsilon}\ mod\ W_L$は$\mathbf{R}_\lambda$に属する。また容易に示せるように、$\sqrt{\varepsilon}\ mod\ W_L$は$\mathbf{P}_\lambda$には属さないが、その2乗は属する。従って、$[\mathbf{R}_\lambda : \mathbf{P}_\lambda]$は2の倍数である。さらにこのとき$W_L = W_K$が分かる。$n_\lambda = [M : K] = 2^m$と$r_1^\lambda + r_2 = 1$およびwが偶数であることに注意すれば、Theorem 2より

$$[\mathbf{R}_\lambda : \mathbf{P}_\lambda] = 2$$

となる。

## 4 [E:R]

この節では$[\mathbf{E} : \mathbf{R}]$について考えます。

**Theorem 3** $d_\lambda$を$n_\lambda$-分体の判別式の絶対値とし、$Q_G = \sqrt{n^{n-2}/\prod_{\lambda\in\Lambda} d_\lambda}$と置く。すると$Q_G$は有理整数であり、

$[\mathbf{E} : \mathbf{R}]$は$(nQ_G)^{r_1+r_2}$の真の約数である。

**Proof** Herbrandの定理（[4],[5]）よりLの$r_1 + r_2$個の単数$\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{r_1+r_2}$でそれらのK上の共役たちが$E_L$の指数有限な部分群を生成するものがとれる。そこで写像

$$\rho : \mathbf{Z}[G]^{\oplus r_1+r_2} \ni (x_1, \ldots, x_{r_1+r_2}) \longrightarrow \prod_{i=1}^{r_1+r_2} {\varepsilon_i}^{x_i}\ mod\ W_L \in \mathbf{E}$$

を考えればcokernelは有限である。従って$\mathbf{Q}$テンサーをとれば

$$0 \to ker\rho \otimes \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}[G]^{\oplus r_1+r_2} \to \mathbf{E}_\mathbf{Q} \to 1\ (exact)$$

となる。**Q**[G] は半単純ゆえ、

$$\mathbf{Q}[G]^{\oplus r_1+r_2} \cong \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \oplus (ker\rho \otimes \mathbf{Q}) \cong (\mathbf{E} \oplus ker\rho) \otimes \mathbf{Q}$$

ここで [1] の結果を引用する。$\wp$ を **Q**[G] の唯一つの maximal order とし、**Z**[G]-module A に対して $A^{\wp}$ で A に含まれる maximal $\wp$-lattice を表わす。もし $A \otimes \mathbf{Q} \cong \mathbf{Q}[G]^{\oplus m}$ であるならば $[A : A^{\wp}]$ は $[\wp : \mathbf{Z}[G]]^m$ の約数であり、等しくなるのは A が **Z**[G]-projective なときかつそのときのみである。これを我々の場合に用いると

$$[\mathbf{E} \oplus ker\rho : (\mathbf{E} \oplus ker\rho)^{\wp}] \text{ は } [\wp : \mathbf{Z}[G]]^{r_1+r_2} \text{ の約数}$$

であることがわかる。さらに $[\mathbf{E} \oplus ker\rho : (\mathbf{E} \oplus ker\rho)^{\wp}] = [\mathbf{E} : \mathbf{E}^{\wp}][ker\rho : (ker\rho)^{\wp}]$ であることと、$\mathbf{E} \oplus ker\rho$ が projective であれば $ker\rho$ も projective であることを考慮すれば

$$[\mathbf{E} : \mathbf{E}^{\wp}] \text{ は } [\wp : \mathbf{Z}[G]]^{r_1+r_2} \text{ の真の約数}$$

であることがわかる。

最後に、[6] でもみているように

$$\wp = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} e_\lambda \mathbf{Z}[G], \quad \mathbf{E}^{\wp} = \mathbf{R}, \quad [\wp : \mathbf{Z}[G]] = nQ_G$$

および $Q_G$ が有理整数であることがわかるので Theorem 3 が得られる。

$[\mathbf{E} : \mathbf{R}]$ の計算は $[\mathbf{R} : \mathbf{P}]$ に比べて難しいと思われます。

**Example 6** K が有理数体または虚二次体のときは $r_1+r_2 = 1$ である。さらに n が素数ならば $Q_G = 1$ である。従って、こ

のときは Theorem 3 より $[\mathbf{E}:\mathbf{R}]$ は n の真の約数である。即ち

$$[\mathbf{E}:\mathbf{R}]=1$$

となる。

**Example 7** K を非 Galois 三次体とし、L を K の Galois 閉包とする。n = 2 だから $Q_G=1$ である。Theorem 3 より、K が非総実ならば $[\mathbf{E}:\mathbf{R}]$ は $2^1$ の約数、総実ならば $[\mathbf{E}:\mathbf{R}]$ は $2^2$ の約数である。K が非総実の場合は$\varepsilon_1$ を K の基本単数とする。K が総実の場合は$\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$ を K の基本単数系とし、$\varepsilon_3=\varepsilon_1\varepsilon_2$ する。すると、$\tau$ を Gal(L/$\mathbf{Q}$) の位数 3 の元としたとき、$\varepsilon_i{}^{\tau}\ mod\ W_L$ は $\mathbf{R}$ に属さないことが示せる。従って、

$$[\mathbf{E}:\mathbf{R}]=\begin{cases}2 & \text{K が非総実のとき}\\ 4 & \text{K が総実のとき}\end{cases}$$

となる。

## References


[1] A.Fröhlich, Invariants for modules over commutative separable orders, Quart. J. Math. Oxford Ser.(2), 16(1965), 193-232.

[2] G.Gras and M.-N.Gras, Calcul du nombre de classes et des unités des extensions abéliennes réelles de $\mathbf{Q}$, Bull. Sci. Math., $2^e$ série, 101(1977), 97-129.

[3] H.Hasse, Über die Klassenzahl abelscher Zahlkörper, Akademie-Verlag, (1952).

[4] J.Herbrand, Nouvelle démonstration et généralisation d'un théorème de Minkowski, C. R. Acad. Sci., Paris, 191(1930), 1282-1285.

[5] J.Herbrand, Sur les unités d'un corps algébrique, C. R. Acad. Sci., Paris, 192(1931), 24-27.

[6] H.W.Leopoldt, Über Einheitengruppe und Klassenzahl reeller abelscher Zahlkörper, Abh. Bayer Akad. Wiss. Math.-nat. Kl., nr.2, Berlin, (1954).

[7] K.Nakamula, Calculation of the class numbers and fundamental units of abelian extensions over imaginary quadratic fields from approximate values of elliptic units, J. Math. Soc. Japan, 37(1985), 245-273.

[8] Y.Odai, On the Group of Units of an Abelian Extension of an Algebraic Number Field, Proc. Japan Acad. Ser.A, 64(1988), 304-306.

[9] R.Schertz, Die Klassenzahl der Teilkörpern abelscher Erweiterungen imaginär-quadratischer Zahlkörpern I, J. Reine Angew. Math., 295(1977), 151-168.